

Parametrización de K -superficies abelianas con multiplicación cuaterniónica

Xavier Guitart y Santiago Molina*

July 15, 2011

Indice

- 1 Superficies abelianas con QM y Curvas de Shimura
- 2 K -superficies abelianas con QM
- 3 Teorema principal

Parametrización superficies abelianas QM

$D, N \in \mathbb{Z}^+, (D, N) = 1, \square \nmid DN.$

- $B_D = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i + \mathbb{Q}j + \mathbb{Q}ij, \quad i^2, j^2 \in \mathbb{Q}^*, ij = -ji,$ álgebra de cuaterniones *indefinida* de discriminante D .
- $\mathcal{O}$ ordre d'Eichler de nivell N en B_D ,

Parametrización superficies abelianas QM

$D, N \in \mathbb{Z}^+, (D, N) = 1, \square \nmid DN.$

- $B_D = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i + \mathbb{Q}j + \mathbb{Q}ij, \quad i^2, j^2 \in \mathbb{Q}^*, ij = -ji$, álgebra de cuaterniones *indefinida* de discriminante D .
- $\mathcal{O}$ ordre d'Eichler de nivell N en B_D ,
- (A, ι) QM por $\mathcal{O}$, $\begin{cases} A/\mathbb{C} \text{ superficie abeliana} \\ \iota : \mathcal{O} \hookrightarrow \text{End}(A) \end{cases}$
- Espacio de moduli:

$$X_0(D, N) = ((\hat{\mathcal{O}}^\times \backslash \hat{B}^\times) \times \mathbb{P}) / B^\times, \quad \begin{cases} \mathbb{P} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ \hat{B} = B \otimes \hat{\mathbb{Z}} \\ \hat{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \otimes \hat{\mathbb{Z}} \end{cases}$$

$B^\times \hookrightarrow (B \otimes \mathbb{R})^\times \simeq \text{GL}_2(\mathbb{R})$ actua en $\mathfrak{H}$ y $\mathbb{P}$.

Clase $\bar{\mathbb{Q}}$ -isogenia

$$(I, \tau) \in (\hat{\mathcal{O}}^\times \setminus \hat{B}^\times) \times \mathbb{P}$$

Clase $\bar{\mathbb{Q}}$ -isogenia

$$(I, \tau) \in (\hat{\mathcal{O}}^\times \setminus \hat{B}^\times) \times \mathbb{P} \rightsquigarrow (A_{I, \tau}, \iota_{I, \tau}); \quad A_{I, \tau} = \mathbb{C}^2 / I \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \end{pmatrix}$$

Clase $\bar{\mathbb{Q}}$ -isogenia

$$(I, \tau) \in (\hat{\mathcal{O}}^\times \setminus \hat{B}^\times) \times \mathbb{P} \rightsquigarrow (A_{I, \tau}, \iota_{I, \tau}); \quad A_{I, \tau} = \mathbb{C}^2 / I \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \end{pmatrix}$$

Clase de isogenia de $(A, \iota) \rightsquigarrow (I, \tau)$

$$[A, \iota] = ((\hat{\mathcal{O}}^\times \setminus \hat{B}^\times) \times \tau) / B^\times$$

Clase $\bar{\mathbb{Q}}$ -isogenia

$$(I, \tau) \in (\hat{\mathcal{O}}^\times \setminus \hat{B}^\times) \times \mathbb{P} \rightsquigarrow (A_{I, \tau}, \iota_{I, \tau}); \quad A_{I, \tau} = \mathbb{C}^2 / I \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \end{pmatrix}$$

Clase de isogenia de $(A, \iota) \rightsquigarrow (I, \tau)$

$$[A, \iota] = ((\hat{\mathcal{O}}^\times \setminus \hat{B}^\times) \times \tau) / B^\times$$

$$\text{Stab}(\tau) = \{b \in B^\times \text{ s.t. } b\tau = \tau\} = \begin{cases} K^\times & \text{cuadrático imaginario (CM)} \\ \mathbb{Q}^\times & \text{(no CM)} \end{cases}$$

$\rightarrow (A, \iota)$ no CM implica $[A, \iota] = ((\hat{\mathcal{O}}^\times \setminus \hat{B}^\times / \mathbb{Q}^\times) \times \tau) \subset X_0(D, N)$.

Curvas de Shimura

Como $\hat{\mathbb{Q}}^\times = \hat{\mathbb{Z}}^\times \mathbb{Q}^\times$,

$$X_0(D, N) = ((\hat{\mathcal{O}}^\times \backslash \hat{B}^\times / \mathbb{Q}^\times) \times \mathbb{P}) / B^\times = ((\hat{\mathcal{O}}^\times \backslash \hat{B}^\times / \hat{\mathbb{Q}}^\times) \times \mathbb{P}) / B^\times$$

Curvas de Shimura

Como $\hat{\mathbb{Q}}^\times = \hat{\mathbb{Z}}^\times \mathbb{Q}^\times$,

$$X_0(D, N) = ((\hat{\mathcal{O}}^\times \backslash \hat{B}^\times / \mathbb{Q}^\times) \times \mathbb{P}) / B^\times = ((\hat{\mathcal{O}}^\times \backslash \hat{B}^\times / \hat{\mathbb{Q}}^\times) \times \mathbb{P}) / B^\times$$

$$(\hat{\mathcal{O}}^\times \backslash \hat{B}^\times / \hat{\mathbb{Q}}^\times) = \prod_{\ell}' (\mathcal{O}_{\ell}^\times \backslash B_{\ell}^\times / \mathbb{Q}_{\ell}^\times)$$

Curvas de Shimura

Como $\hat{\mathbb{Q}}^\times = \hat{\mathbb{Z}}^\times \mathbb{Q}^\times$,

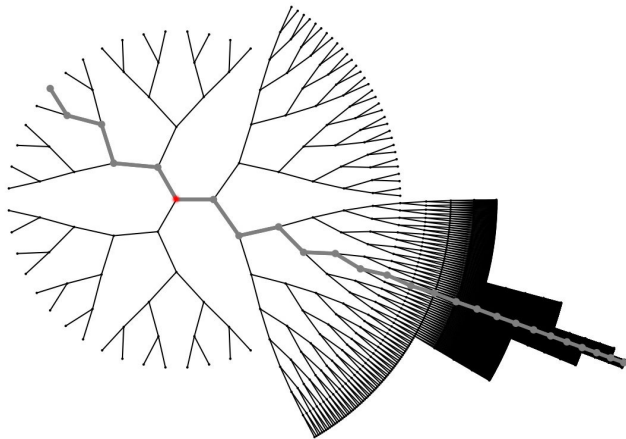
$$X_0(D, N) = ((\hat{\mathcal{O}}^\times \backslash \hat{B}^\times / \mathbb{Q}^\times) \times \mathbb{P}) / B^\times = ((\hat{\mathcal{O}}^\times \backslash \hat{B}^\times / \hat{\mathbb{Q}}^\times) \times \mathbb{P}) / B^\times$$

$$(\hat{\mathcal{O}}^\times \backslash \hat{B}^\times / \hat{\mathbb{Q}}^\times) = \prod_{\ell}' (\mathcal{O}_{\ell}^\times \backslash B_{\ell}^\times / \mathbb{Q}_{\ell}^\times)$$

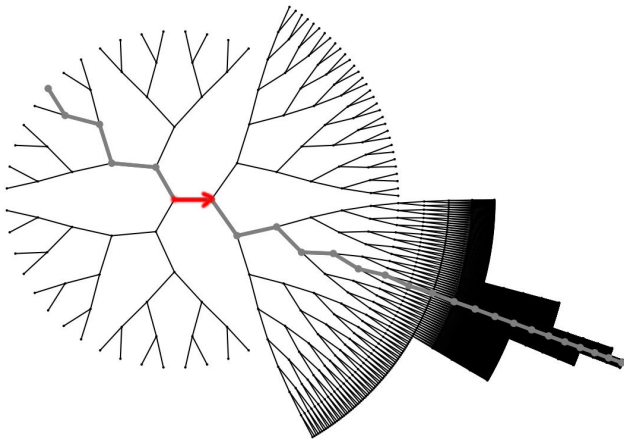
$$\mathcal{O}_{\ell}^\times \backslash B_{\ell}^\times / \mathbb{Q}_{\ell}^\times = \begin{cases} \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_{\ell}) \backslash \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_{\ell}), & \ell \nmid DN \\ \Gamma_0(\ell) \backslash \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_{\ell}), & \ell \mid N \\ \{\mathcal{O}_D, \mathcal{P}_D\} \end{cases}$$

$$[A, \iota] = \prod_{\ell}' (\mathcal{O}_{\ell}^\times \backslash B_{\ell}^\times / \mathbb{Q}_{\ell}^\times) \times \tau.$$

Arbol Bruhat-Tits $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_\ell) \backslash \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$



Arbol Bruhat-Tits $\Gamma_0(\ell) \backslash \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$



Involuciones de Atkin-Lehner y Proyecciones "olvido"

Involuciones de Atkin-Lehner

$W(D, N) = \{ \langle \omega_\ell : \ell \mid DN \rangle \} \subseteq \text{End}_{\mathbb{Q}}(X_0(D, N))$, ω_ℓ cambia el sentido de la arista.

Involuciones de Atkin-Lehner y Proyecciones "olvido"

Involuciones de Atkin-Lehner

$W(D, N) = \{ \langle \omega_\ell : \ell \mid DN \rangle \} \subseteq \text{End}_{\mathbb{Q}}(X_0(D, N))$, ω_ℓ cambia el sentido de la arista.

Proyecciones "olvido"

$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_0$ maximal,

$$\phi : X_0(D, N) \longrightarrow X_0(D, 1); \quad (A, \iota) \longmapsto (A_0, \iota_0)$$

Esto da lugar a:

$$\varphi : X_0(D, N) \hookrightarrow X_0(D, 1) \times X_0(D, 1); \quad P \longmapsto (\phi(P), \phi(\omega_N(P)))$$

ambas definidas sobre $\mathbb{Q}$

Involuciones de Atkin-Lehner y Proyecciones "olvido"

Involuciones de Atkin-Lehner

$W(D, N) = \{ \langle \omega_\ell : \ell \mid DN \rangle \} \subseteq \text{End}_{\mathbb{Q}}(X_0(D, N))$, ω_ℓ cambia el sentido de la arista.

Proyecciones "olvido"

$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_0$ maximal,

$$\phi : X_0(D, N) \longrightarrow X_0(D, 1); \quad (A, \iota) \longmapsto (A_0, \iota_0)$$

Esto da lugar a:

$$\varphi : X_0(D, N) \hookrightarrow X_0(D, 1) \times X_0(D, 1); \quad P \longmapsto (\phi(P), \phi(\omega_N(P)))$$

ambas definidas sobre $\mathbb{Q}$

Observación $\rightarrow \phi[A, \iota] \subseteq [A_0, \iota_0]$,

Involuciones de Atkin-Lehner y Proyecciones "olvido"

Involuciones de Atkin-Lehner

$W(D, N) = \{ \langle \omega_\ell : \ell \mid DN \rangle \} \subseteq \text{End}_{\mathbb{Q}}(X_0(D, N))$, ω_ℓ cambia el sentido de la arista.

Proyecciones "olvido"

$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_0$ maximal,

$$\phi : X_0(D, N) \longrightarrow X_0(D, 1); \quad (A, \iota) \longmapsto (A_0, \iota_0)$$

Esto da lugar a:

$$\varphi : X_0(D, N) \hookrightarrow X_0(D, 1) \times X_0(D, 1); \quad P \longmapsto (\phi(P), \phi(\omega_N(P)))$$

ambas definidas sobre $\mathbb{Q}$

Observación $\rightarrow \phi[A, \iota] \subseteq [A_0, \iota_0]$, $W(D, N)$ actúa en $[A, \iota]$.

K -superficies abelianas con QM

$A/\bar{K}$ es K -variedad abeliana, $\forall \sigma \in \text{Gal}(\bar{K}/K)$, $\exists \mu_\sigma : A^\sigma \rightarrow A$ isogenia t.q. $\psi \circ \mu_\sigma = \mu_\sigma \circ \psi^\sigma$ para todo $\psi \in \text{End}(A)$.

K -superficies abelianas con QM

$A/\bar{K}$ es K -variedad abeliana, $\forall \sigma \in \text{Gal}(\bar{K}/K)$, $\exists \mu_\sigma : A^\sigma \rightarrow A$ isogenia t.q. $\psi \circ \mu_\sigma = \mu_\sigma \circ \psi^\sigma$ para todo $\psi \in \text{End}(A)$.

¿Como construir K -superficies abelianas con QM?

K -superficies abelianas con QM

$A/\bar{K}$ es K -variedad abeliana, $\forall \sigma \in \text{Gal}(\bar{K}/K)$, $\exists \mu_\sigma : A^\sigma \rightarrow A$ isogenia t.q. $\psi \circ \mu_\sigma = \mu_\sigma \circ \psi^\sigma$ para todo $\psi \in \text{End}(A)$.

¿Como construir K -superficies abelianas con QM?

$P \in X_0(D, N)/W(D, N)(K)$ sin CM, $Q \in X_0(D, N)(\bar{K})$ preimagen.

K -superficies abelianas con QM

$A/\bar{K}$ es K -variedad abeliana, $\forall \sigma \in \text{Gal}(\bar{K}/K)$, $\exists \mu_\sigma : A^\sigma \rightarrow A$ isogenia t.q. $\psi \circ \mu_\sigma = \mu_\sigma \circ \psi^\sigma$ para todo $\psi \in \text{End}(A)$.

¿Como construir K -superficies abelianas con QM?

$P \in X_0(D, N)/W(D, N)(K)$ sin CM, $Q \in X_0(D, N)(\bar{K})$ preimagen.

$$\phi(P) \in X_0(D, 1)(\bar{K}) \rightsquigarrow (A_0, \iota_0)/\bar{K} \text{ QM por } \mathcal{O}_0$$

$$\sigma \in \text{Gal}(\bar{K}/K), \quad Q^\sigma = \omega_n(Q), \quad n \mid DN$$

$$\Rightarrow \phi(Q)^\sigma = \phi(Q^\sigma) = \phi(\omega_n(Q)) \rightsquigarrow (A_0^\sigma, \iota_0^\sigma) \in [A_0, \iota_0]$$

$$\Rightarrow (A_0, \iota_0) \text{ } K\text{-superficie abeliana con QM por } \mathcal{O}_0.$$

Notacion: $P \in X_0(D, N)/W(D, N)(K) \leftrightarrow [A_0, \iota_0]$

Teorema principal

Theorem (X. Guitart-S.M.)

(A_0, ι_0) K -superficie abeliana con QM por $\mathcal{O}_0$ sin CM.

$\exists \square \nmid N$ dependiendo de $[A_0, \iota_0]$ y un $P \in X_0(D, N)/W(D, N)(K)$ tal que $P \leftrightarrow [A_0, \iota_0]$. Además,

$$P' \in X_0(D, N')/W(D, N')(K) \leftrightarrow [A_0, \iota_0] \Rightarrow N \mid N'.$$